

ЛЕКЦИЯ-5

ФРЕДГОЛЬМ ТЕОРИЯСЫ

§4.1. Ерекшеленген ядролы Фредгольмнің 2-текті интегралдың теңдеуі

Ерекшеленген ядро деп біреуі тек x айнымалысына, ал екіншісі тек s айнымалысына тәуелді екі функция көбейтінділерінің ақырлы қосындысынан тұратын, яғни

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(s) \quad (44)$$

түріндегі ядро аталады. Жалпы жағдайда $a_i(x), b_i(s)$ функциялары өзара сызықты тәуелсіз деп қараймыз. Егер олардың кейбіреулері сызықты тәуелді болса, (44) өрнегіндегі қосылғыштарды жинақтап, көбейткіштері сызықты тәуелсіз болатындай етіп түрлендіруге болады.

$a_i(x), b_i(s) \in L_2[a, b]$ болсын. Бұл жағдайда $K(x, s) \in L_2[a, b]$ Фредгольмнің екінші текті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (45)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер $K(x, s)$ ядросын (44) өрнекпен ауыстырсақ, онда (45) теңдеуден

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (46)$$

теңдеуі шығады. Бұл теңдеудің шешімі бар деп ұйғарайық. Егер

$$C_i = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(s)\varphi(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

деп белгілесек, онда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x). \quad (47)$$

Сонымен (45) теңдеуінің шешімін табу мәселесі тұрақты $C_i, i = \overline{1, n}$ белгісіз коэффициенттерін анықтауға келтіріледі.

Егер (47) теңдеуінің екі жағында $b_i(x)$ функцияларына көбейтіп, алған өрнекті x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ, C_i коэффициенттерін анықтайтын алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесін

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n C_j K_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

аламыз, мұнда

$$f_i = \int_a^b f(x)b_i(x)dx, \quad K_{ij} = \int_a^b b_i(x)a_j(x)dx.$$

Әрине, осы алгебралық жүйенің шешімі жоқ болса, онда (46) интегралдық теңдеуінің де шешімі жоқ болады. Егер $C_1, C_2, \dots, C_n$ белгісіздері (48) жүйенің шешімдері бар болса, онда (47) теңдігінен $\varphi(x)$ функциясының (46) теңдеуінің шешімі екенін тексеріп көру қиын емес.

Ал (48) теңдеулер жүйесі шешімінің бар болуы белгісіз $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициенттерінен құралған анықтауышқа байланысты екені алгебрадан белгілі. Сондықтан

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & \dots & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} & \dots & -\lambda K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & \dots & 1 - \lambda K_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышын қарастырайық. Әрине $D_n(\lambda)$ анықтауыш λ -ға байланысты n -дәрежелі көпмүшелік және $D_n(\lambda) \neq 0$, себебі $D_n(0) = 1$. Демек, $D_n(\lambda)$ көпмүшелігі түбірлерінің саны n -нан артық болмайды. Ол түбірлерін $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ деп белгілейік.

$D_n(\lambda)$ көпмүшелігі (46) теңдеуі үшін **Фредгольм анықтауышы**, ал ол көпмүшеліктің түбірлері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $K_n(x, s)$ ядросының немесе (46) интегралдық теңдеуінің меншікті мәндері (сандары) деп аталады. Сызықтық алгебралық жүйе теориясы ($D_n(\lambda)$ анықтауыш үшін) мына тұжырымдарға әкеледі.

1⁰. Егер λ саны $D_n(\lambda)$ көпмүшелігі түбірлерінің бірде біреуіне тең болмаса, онда кез келген $f_i, (i=1, 2, \dots, n)$ функциялары үшін (48) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болады. Демек, (45) интегралдық теңдеуі үшін мына тұжырым орындалады.

1 теорема. Егер λ саны $K(x, s)$ ядросының меншікті мәні болмаса, онда (46) интегралдық теңдеуінің кез келген $f(x)$ үшін (47) өрнегімен анықталған жалғыз ғана $\varphi(x)$ шешімі бар болады.

Әдетте, бұл тұжырымды “Фредгольмнің бірінші теоремасы” дейді. $D_n(\lambda) \neq 0$ болса, біртекті алгебралық жүйенің шешімдері $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ болады. Сондықтан $D_n(\lambda) \neq 0$ жағдайында біртекті интегралдық теңдеудің ($f(x) = 0$) тек қана нөлдік шешімі бар болады.

Егер (48) жүйесін Крамер әдісі бойынша шешетін болсақ, онда алымындағы анықтауыштарды бос мүшесі орналасқан баған элементтері бойынша жіктеп,

$$C_i = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda), \quad (i=1,2,\dots,n)$$

жазуға болады. Мұндағы, $D_{ij}(\lambda)$ алгебралық толықтауыш, ол көрсеткіші $n-1$ -ден аспайтын λ -ға байланысты көпмүшелік. Белгісіз C_i ($i=1,2,\dots,n$) сандарының осы мәндерін (47) формуласына қойып, (46) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_j(s) ds$$

түрінде немесе

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds$$

формуласымен анықтаймыз, мұнда

$$R(x,s;\lambda) = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{i,j=1}^n D_{ij}(\lambda) a_i(x) b_j(s)$$

жоғарыдағы (46) интегралдық теңдеуінің резольвентасы (шешуші ядросы) делінеді.

2⁰. Енді λ саны $D_n(\lambda) = 0$ теңдеуі түбірлерінің біреуіне тең, яғни K ядросының меншікті мәні болсын. Онда (48) жүйенің анықтауышы нөлге тең. Бұндай жағдайда сәйкес біртекті

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} C_j = 0, \quad i=1,2,\dots,n$$

жүйенің $p = n - r$ теңдеуі (мұнда r саны $D_n(\lambda)$ матрицасының рангі) сызықты тәуелсіз және нөлге тең емес

$$(C_1^{(l)}, C_2^{(l)}, \dots, C_n^{(l)}), \quad l=1,2,\dots,p$$

вектор оның шешімі болады. Ал сонда

$$\varphi_l(x) = \sum_{i=1}^n C_i^{(l)} a_i(x)$$

функциялары біртекті интегралдық теңдеуінің

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds$$

нөлге тең емес шешімдері болады. Бұл теңдеудің жалпы шешімі болып

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^n \alpha_l \varphi_l(x)$$

мұндағы, α_l кез келген тұрақты шамалар. Біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешімдерін сол теңдеудің меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялары деп атайды.

Енді (45) теңдеуімен қатар

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds + g(x)$$

интегралдық теңдеуді қарастырайық, мұнда, $K^*(x, s) = K(s, x)$. Осы теңдеуді (45) интегралдық теңдеуіне *түйіндес теңдеу* деп атайды. Ерекшеленген ядролы (46) интегралдық теңдеуіне түйіндес

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(s) b_i(x) \psi(s) ds + g(x)$$

теңдеуді қарастырайық. Бұл теңдеу үшін, (46) теңдеуіне айтылған тұжырымдарды сөзбе-сөз қайталауға болады. Оның шешімі

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i b_i(x)$$

түрінде жазылады, мұнда,

$$C_i^* = \int_a^b \psi(s) a_i(s) ds.$$

Егер $g(x) = 0$, яғни теңдеу біртекті болса, онда C_i^* тұрақты коэффициенттерін сәйкес біртекті жүйеге түйіндес

$$C_i^* - \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} C_j^* = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

теңдеулері жүйесінен анықтаймыз. $D_n(\lambda)$ анықтауышы аталған жүйелерге ортақ болғандықтан соңғы жүйенің $p = n - r$ сызықты байланыссыз вектор-шешімі бар болады:

$$(C_1^{*(l)}, C_2^{*(l)}, \dots, C_n^{*(l)}), \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Сондықтан $\psi_l(x) = \sum_{i=1}^n C_i^{*(l)} b_i(x)$ функциялары түйіндес біртекті интегралдық теңдеуінің

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(x) \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds$$

шешімдері болады. Осыдан мынандай қорытынды шығады.

2 теорема. Егер λ параметрі $K(s, x)$ ядросының меншікті мәні болса, онда біртекті интегралдық теңдеу мен оған түйіндес теңдеудің бірдей санды сызықты тәуелсіз меншікті функциялары бар болады.

Бұл тұжырымды “Фредгольмнің екінші теоремасы” деп айтады.

3⁰. Енді λ параметрі бір текті емес (46) интегралдық теңдеуінің меншікті мәні болған жағдайды қарастырайық. Жоғарыда айтқандай (46) теңдеуінің шешілуі (48) сызықты теңдеулер жүйесінің шешілуімен эквивалентті. Сондықтан егер λ параметрі $D_n(\lambda)$ теңдеуінің түбірі болса, онда (48) жүйе шешілмейді, демек, (46) интегралдық теңдеуінің шешімі жоқ болады. Ал, егер $f_i(x) = 0$, яғни:

$$\int_a^b f(x)b_i(x)dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

болса, онда (48) жүйенің шешімі бар. Демек, соңғы шарттар орындалған жағдайда (46) біртекті емес интегралдық теңдеуінің шешімі бар болады. Осы шарттарды жоғарыдағы қатарға қолдансақ,

$$\int_a^b f(x)\psi_l(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i^{*(l)} \int_a^b f(x)b_i(x)dx = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

шарттарын аламыз. Сонымен мынадай теореманы дәлелдедік.

3 теорема. Егер λ ядроның меншікті мәні болса, онда жалпы жағдайда (46) интегралдық теңдеуінің шешімі жоқ болады. Біртекті емес (46) интегралдық теңдеуінің шешімі бар болуы үшін ондағы бос мүше $f(x)$ ол теңдеуге түйіндес біртекті теңдеудің сәйкес барлық шешімдеріне ортогональ болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл – “Фредгольмнің үшінші теоремасы”. Ал соңғы шарттар орындалған жағдайда (46) теңдеуінің ақырсыз көп шешімі бар болады:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{l=1}^p \alpha_l \varphi_l(x),$$

мұндағы, $\varphi_0(x)$ – біртекті емес интегралды теңдеудің жеке шешімі, ал $\sum_{l=1}^p \alpha_l \varphi_l(x)$ сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

§4.2. Фредгольмнің жалпы интегралдық теңдеуін ерекшеленген

ядролы теңдеуге келтіру

Фредгольмнің ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеуін шешу мәселесін екі интегралдық теңдеуді шешуге келтіреміз: ол теңдеулердің біреуі біртіндеп жуықтау әдісімен, яғни резольвента арқылы шешіледі, ал

екінші–ерекшеленген ядролы теңдеу, бұл жағдайда $K(s, x)$ ядросы өзіне жуық ерекшеленген ядромен аппроксимацияланады. Мұндай аппроксимациялауды бірнеше жолмен орындауға болады. Мәселен, егер $K(s, x)$ ядросы $a \leq x, s \leq b$ облысында бірқалыпты жинақты дәрежелік немесе қос тригонометриялық қатарға жіктелсе, онда $K(s, x)$ ядросына дәрежелік немесе тригонометриялық қатардың S_n дербес қосындысы мен жуықтауға болады, ал $K(x, s) - S_n$ айырымы жинақталатын қатардың қалдығы болғандықтан ақырсыз аз шама.

Фредгольмнің 2-текті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (49)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеудегі ядро $K(x, s) \in L_2(a, b)$, яғни

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds = B^2 < \infty$$

болсын. $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) функциялары $[a, b]$ аралығында ортонормаланған және ол жүйе толық болсын. Белгілі $K(x, s) \in L_2(a, b)$, ядросын $\varphi_k(x)\varphi_m(s)$ функцияларымен Фурье қатарына

$$K(x, s) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s) \quad (50)$$

жіктеуге болады. Бұл қатар $a \leq x, s \leq b$ болғанда орташа мағанада жинақты.

$\varphi_k(x)\varphi_m(s)$ функциялары жүйесі $a \leq x, s \leq b$ облысында толық болғандықтан, Парсевальдың тұйықтық шарты

$$\sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km}^2 = B^2 \quad (51)$$

орынды. Егер (50) қатарының дербес қосындысын

$$K_n(x, s) = \sum_{k, m=1}^n A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s)$$

деп белгілесек, ол ерекшеленген ядро болады.

Енді $K_0(x, s) = K(x, s) - K_n(x, s)$ деп белгілейік. Сонда $K_0(x, s)$ функциясы (50) Фурье қатарының қалдығы болады:

$$\sum_{k, m \geq n} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s) = K_0(x, s),$$

$$\int_a^b \int_a^b K_0^2(x, s) ds dx = B_0^2$$

деп белгілейік. Осы қатарға тұйықтық шартын пайдалансақ,

$$B_0^2 = \sum_{k,m \geq n} A_{km}^2$$

өрнегін аламыз. Алынған қатар жинақталатын (51) қатарының қалдығы, сондықтан соңғы қатар қосындысы n , жеткілікті дәрежедегі үлкен сан болғанда, жеткілікті дәрежедегі аз шама. Сондықтан n -ның үлкен мәндерінде $|\lambda|B_0 < 1$ теңсіздігі орындалады, бұл шартты қанағаттандыратын $K_0(x,s)$ -ті **кішкентай ядро** деп атаймыз.

Сонымен $K(x,s)$ ядросы $K(x,s) = K_0(x,s) + K_n(x,s)$ түріндегі ($K_n(x,s)$ - ерекшеленген, ал $K_0(x,s)$ кішкентай) ядроларға жіктеледі. Енді (49) теңдеуінің ядросын соңғы теңдіктегі қосындымен ауыстырып,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x,s) \varphi(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds$$

өрнегін аламыз. Осы теңдіктің оң жағындағы өрнекті

$$F(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds$$

деп белгілесек, онда

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x,s) \varphi(s) ds = F(x)$$

теңдеуін аламыз. Бұрынғы дәлелдеулер бойынша $|\lambda|B_0 < 1$ шарты орындалғанда бұл теңдеудің жалғыз шешімі бар болады, ол шешім $K_0(x,s)$ ядросының резольвентасы $R(x,s;\lambda)$ арқылы өрнектеледі:

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) F(s) ds.$$

Ал $F(x)$ функциясын оның мәнімен ауыстырсақ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds + f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x,s;\lambda) \left[f(s) + \lambda \int_a^b K_n(s,t) \varphi(t) dt \right] ds + \\ & + \lambda \int_a^b R_0(x,s;\lambda) f(s) ds + \lambda \int_a^b \left[K_n(x,s) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) K_n(t,s) dt \right] \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Енді

$$\tilde{K}(x,s) = K_n(x,s) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) K_n(t,s) dt,$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x, s; \lambda) f(s) ds$$

деп белгілесек, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \tilde{K}(x, s) \varphi(s) ds + \tilde{f}(x)$$

түріне келтіреміз. Әрине, мұндағы $K(x, s)$ – ерекшеленген ядро, себебі, $K_n(x, s)$ ядросы тозғындалған:

$$\int_a^b R_0(x, t; \lambda) K_n(t, s) dt = \int_a^b R_0(x, t; \lambda) \sum_{k,m=1}^n \varphi_k(t) \varphi_m(s) dt = \sum_{k,m=1}^n \left(\int_a^b R_0(x, t; \lambda) \varphi_k(t) dt \right) \varphi_m(s)$$

Сонымен, (49) түріндегі кез келген интегралдық теңдеуді ерекшеленген ядролы теңдеуге келтіруге болады. Міне, осы жағдайды пайдаланып, ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеу үшін Фредгольм теоремасы үзіліссіз ядролы немесе ядросы L_2 -де болатын кез келген Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі үшін орынды деп айта аламыз.

Ескерту. Қолданбалы есептерде бұл теорияны пайдаланғанда $K_0(x, s)$ ядросын қажетті дәрежеде аз етіп, оны ескермей, бірден белгісіз функцияны $\varphi(x)$, оң жағы $f(x)$ болған ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеуді шешеді. Бұл жағдайда ядросы $K_n(x, s)$ ерекшеленген интегралдық теңдеудің шешімі ерекшеленбеген теңдеудің шешімінен өте аз шамада ғана айырмашылықта болатынын көрсету оңай.